Från igår:

Koordinat-transformationer vid basbyte.

Dessa är

linjära

dec 3-09:59

Vi kunde uttrycka det med en basbytesmatris

$$ {}_G P_F $$

Vi stoppar in koordinater i

dec 3-10:01

basen F till höger och får ut koordinater i basen G

$$(\bar{v})_G = {}_G P_F (\bar{v})_F$$

dec 3-10:01

I exemplet var

ena basen

E - standardbasen

och

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

dec 3-10:01

Lätt att skriva upp

$$ {}_{E}P_{F} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} $$

Ex:

$$ (\bar{v})_{F} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} $$

dec 3-10:01

dvs

$$\bar{v} = 4\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}_E$$

$$\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix}1 & 1\\2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$$

dec 3-10:01

Vi kunde göra tvärtom genom

$$ {}_F P_E = \left({}_E P_F \right)^{-1} $$

$$ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} $$

dec 3-10:01

Basbyte för linjära avbildn.

Om A är matris för $T: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$

om F är bas för $\mathbb{R}^m$

om G — " — $\mathbb{R}^n$

Så får vi matrisen

dec 3-10:11

$${}_G A_G = {}_F P_E \, {}_E A_E \, {}_E P_F$$

Idag ska vi se mer på när

$m = n$

$$T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

dec 3-10:12

Nu är det naturligt att ha en bas F för både $\mathbb{R}^n$ och $\mathbb{R}^n$

Alltså vill vi se på

$$_F A_F = {}_F P_E \, {}_E A_E \, {}_E P_F$$

dec 3-10:19

Alltså är

$$ {}_F A_F = P^{-1} A P $$

där

$$ P = {}_E P_F $$

dec 3-10:21

Lätt att räkna med diagonalmatriser

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 0 \\ 0 & 4\cdot 3 \end{pmatrix}$$

dec 3-10:22

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2+1 & 0 \\ 0 & 4+3 \end{pmatrix}$$

dec 3-10:24

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 1+3\cdot 1 & 2\cdot(-1)+3\cdot 2 \\ 1\cdot 1+2\cdot 1 & 1\cdot(-1)+2\cdot 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Åtta} = 2^3$$

dec 3-10:26

Det krävs annars

n^3 multiplikationer

för att multiplicera

två st. $n \times n$-matriser.

dec 3-10:28

Om $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n$ är egenvektorer till $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ och är linjärt oberoende. Då har vi en bas av egenvektorer.

dec 3-10:29

Om $F = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n\}$ blir matrisen för T i basen F

$$ {}_F A_F = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & a_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & a_n \end{pmatrix} $$

där a_i är egenvärdet till $\bar{u}_i$.

dec 3-10:31

Varför?

$$\bar{T}(\bar{u}_i) = a_i \bar{u}_i$$

$$(u_i)_F = \bar{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$$

dec 3-10:32

Alltså har vi att

matrisen $A_{\underline{F}\,\underline{F}}$

ska switcha $\bar{e}_i = (u_i)_F$

på $a_i \bar{e}_2 = (a\bar{u}_i)_F$

dec 3-10:33

Exempel

$\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ har koordinater $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i basen $F = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

om

$\bar{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ har koord.

dec 3-10:34

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ i basen F

$$T\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= 5\bar{u}_1$$

har koordinater $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ i basen F.

dec 3-10:35

$$T\bar{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= -1 \cdot \bar{u}_2$$

har koordinater $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

i basen F,

dec 3-10:37

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Alltså är

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A_F^F$$

dec 3-10:37

Vi säger att
det går att
diagonalisera
en matris A
om det finns P
så att
$P^{-1}AP = D$ ← diagonal!

dec 3-10:40

Ex: $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

Beräkna kar. ekv.

$$\det(A - xI) = 0$$

dvs

$$\det\begin{pmatrix} 2-x & 4 \\ -1 & -2-x \end{pmatrix} = 0$$

dec 3-10:43

$$\iff (2-x)(-2-x)-(-1)4=0$$

$$\iff -4+x^2+4=0$$

$$\iff x^2=0$$

Vi kan hitta egen-
vektorerna som
hör till egenvärdet
0.

dec 3-10:43

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \quad \tfrac{1}{2} \quad \tfrac{1}{2}$$

fri

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$x_1 = -2x_2, \quad x_2 = t$$

$$(x_1, x_2) = t(-2, 1)$$

dec 3-10:45

Varför är $\bar{u}$ och $\bar{v}$ linjärt oberoende om de är egenvektorer med olika egenvärden?

$$\bar{T}\bar{u} = a\bar{u}$$
$$\bar{T}\bar{v} = b\bar{v} \qquad a \neq b$$

dec 3-11:04

Om $\bar{u} \parallel \bar{v}$ så

är $\bar{u} = c\bar{v}$

$$T\bar{u} = T(c\bar{v}) =$$

$$= cT(\bar{v})$$

$$= cb\bar{v} = b\bar{u}$$

men $T\bar{u} = a\bar{u} \neq b\bar{u}$

dec 3-11:06

Alltså får vi motsägelse mot att

$$\bar{u} \parallel \bar{v}.$$

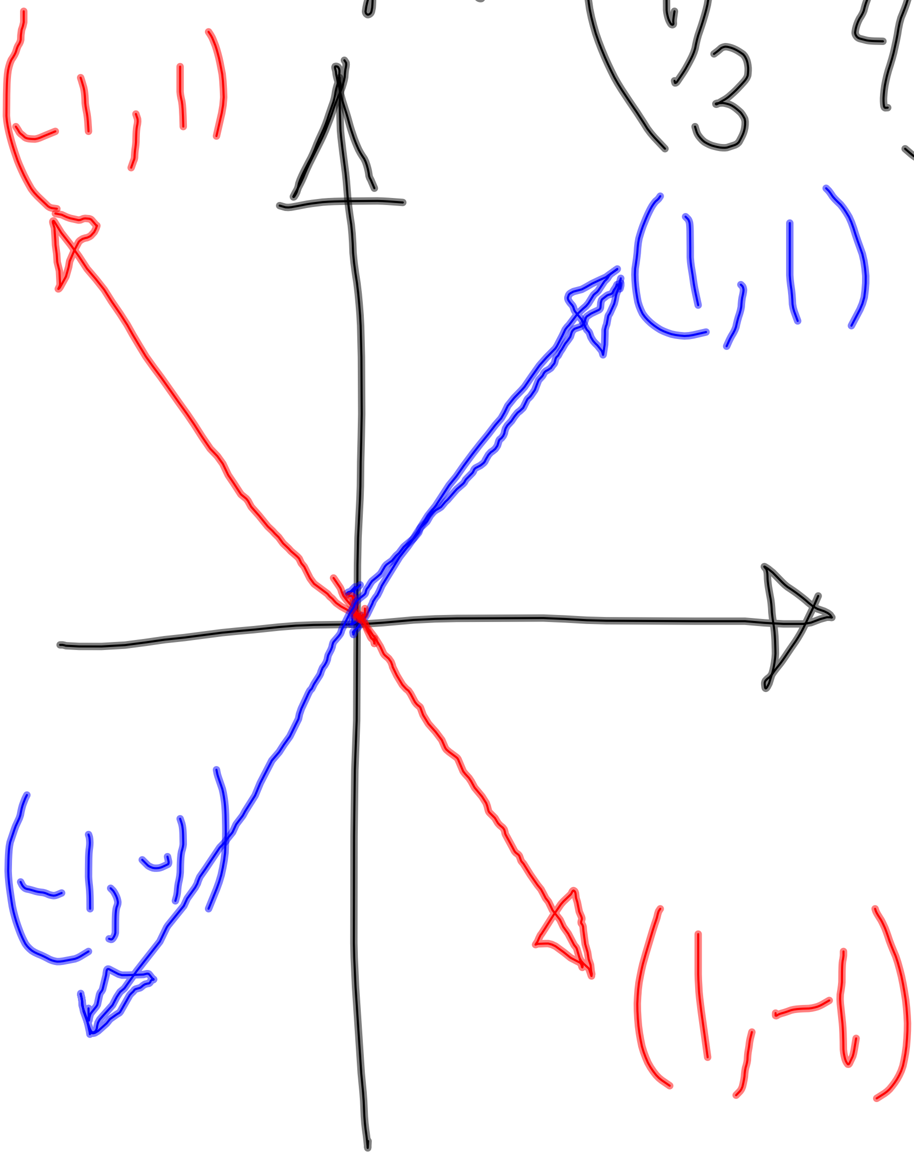
dec 3-11:07

För symmetriska 2x2-matriser räcker det att hitta en egenvektor eftersom den andra måste vara ortogonal mot den första.

dec 3-11:11

Ex

$$A = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$



dec 3-11:12

$$\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Alltså: egenvärde $1/3$.

dec 3-11:13

Genom att välja basvektorer av längd 1 får vi ortogonal basbytesmatris och

$$P^{-1} = P^t$$

dec 3-11:17

Nu väljer vi

$$\bar{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ och}$$

$$\bar{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow$$

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

dec 3-11:18

$$P^t = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dec 3-11:19

Vi kan nu skriva

$$P^t A P =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ 1 & -1/3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

dec 3-11:20

Ex Uppgift 8.12

Bestäm P och D

så att

$$P^{-1}AP = D$$

om

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

dec 3-11:37

Ett egenvärde 3

och motsvarande

egenvektor $(1,1)^t$

Precis som förut

måste $\bar{u}_2 \perp \bar{u}_1$

dvs $\bar{u}_2 = (1,-1)^t$

dec 3-11:39

Matrisen

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

är ortogonal och kolonnerna är egenvektorer.

dec 3-11:41

Alltså

$$P^{-1}AP = P^{t}AP$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

dec 3-11:41

$$\det(P^{-1}AP) =$$

$$\det(P^{-1})\det(A)\cdot$$

$$\det(P) = \det(A)$$

$$= \det(D)$$

dec 3-11:43